编者的话

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962年4月

"……宋末南徐州从事史祖冲之更开密法，以圆径……为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽；正数在盈朒二限之間。密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五；約率：圆徑七，周二十二。……指要精密，算氏之最者也。所著書，名为綴术，学官莫能究其深奥，是故废而不理。"

——唐长孙无忌《隋書》卷十六律历卷十一——

目　次

一　祖冲之的約率$\frac{22}{7}$和密率$\frac{355}{113}$

祖冲之是我国古代的伟大数学家。他生于公元429年，卒于公元500年。他的儿子祖暅和他的孙子祖皓，也都是数学家，善算历。

关于圆周率π，祖冲之的貢献有二：

(i)$3.1415926<\pi<3.1415927$；

(ii)他用$\frac{22}{7}$作为約率，$\frac{355}{113}$作为密率。

这些結果是刘徽割圆术之后的重要发展。刘徽从圆内接正六边形起算，令边数一倍一倍地增加，即12、24、48、96、……1536，……，因而逐个算出六边形、十二边形、二十四边形……的面积，这些数值逐步地逼近圆周率。刘徽方法的特点，是得出一批一个大于一个的数值，这样来一步一步地逼近圆周率。这方法是可以无限精密地逼近圆周率的，但每一次都比圆周率小。

祖冲之的結果(i)从上下两方面指出了圆周率的誤差范围。这是大家都容易看到的事实，因此在这本小書中不預备多講。我只准备着重地談一談結果(ii)。在談到$\frac{355}{113}$的时候，一定能从

$$\frac{355}{113}=3.1415929\cdots$$

看出，他所提出的$\frac{355}{113}$惊人精密地接近于圆周率，准确到六位

小数。也有人会指出这一发現比欧洲人早了一千年。因为德国人奥托(Valenlinus Otto)在1573年才发現这个分数。如果更深入地想一下，就会发現$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$的意义还远不止这些。有些人認为那时的人們喜欢用分数来計算。这样看問題未免太簡单了。其实其中孕育着不少道理，这道理可以用来推算天文上的很多現象。无怪乎祖冲之祖孙三代都是算历的专家。这个約率和密率，提出了"用有理数最佳逼近实数"的問題。"逼近"这个概念在近代数学中是十分重要的。

二　人造行星将于2113年又接近地球

我們暫且把"用有理数最佳逼近实数"的問題放一放，而再提一个事实：

1959年苏联第一次发射了一个人造行星，报上說：苏联某专家算出，五年后这个人造行星又将接近地球，在2113年又将非常接近地球。这是怎样算出来的？难不难，深奥不深奥？我們中学生能懂不能懂？　我說能懂的！不需要专家，中学生是可以学懂这个方法的。

先看为什么五年后这个人造行星会接近地球。报上登过这个人造行星繞太阳一周的时間是450天。如果以地球繞日一周360天計算，地球走五圈和人造行星走四圈不都是1800天嗎？因此五年后地球和人造行星将相互接近。至于为什么在2113年这个人造行星和地球又将非常接近？　我們将在第四节中說明。

再看五圈是怎样算出来的。　任何中学生都会回答：这是

由于約分

$$\frac{360}{450}=\frac{4}{5}$$

而得来的，或者这是求 450 和 360 的最小公倍数而得来的。它們的最小公倍数是 1800，而 $\frac{1800}{360}=5$，$\frac{1800}{450}=4$；也就是当地球繞太阳五圈时，人造行星恰好回到了原来的位置。求最小公倍数在这儿找到了用場。在进入下节介紹輾轉相除法之前，我們再說一句，地球繞太阳并不是360天一周，而是 $365\frac{1}{4}$ 天。因而仅仅学会求最小公倍数法还不能够应付这一問題，还須更上一层楼。

三 輾轉相除法和連分数

我們还是循序漸进吧。先从簡单的(原来在小学或初中一年級講授的)輾轉相除法講起。但我們采用較高的形式，采用学过代数学的同学所能理解的形式。

給两个正整数 a 和 b，用 b 除 a 得商 a_0，余数 r。写成式子

$$a=a_0b+r,\qquad 0\leqslant r<b. \tag{1}$$

这是最基本的式子。如果 r 等于 0，那么 b 可以除尽 a，而 a、b 的最大公約数就是 b。

如果 $r\neq 0$，再用 r 除 b，得商 a_1，余数 r_1，即

$$b=a_1r+r_1\qquad 0\leqslant r_1<r. \tag{2}$$

如果 $r_1=0$，那么 r 除尽 b，由(1)它也除尽 a。又任何一个除尽 a 和 b 的数，由(1)也一定除尽 r。因此，r 是 a、b 的最大公約数。

如果 $r_1\neq 0$，用 r_1 除 r，得商 a_2，余数 r_2，即

$$r=a_2r_1+r_2,\qquad 0\leqslant r_2<r_1. \qquad (3)$$

如果 $r_2=0$，那么由（2）r_1 是 b、r 的公約数，由（1）它也是 a、b 的公約数．反之，如果一数除得尽 a、b，那由（1）它一定除得尽 b、r，由（2）它一定除得尽 r、r_1，所以 r_1 是 a、b 的最大公約数．

如果 $r_2\neq 0$，再用 r_2 除 r_1，如法进行．由于 $b>r>r_1>r_2>\cdots\cdots(\geqslant 0)$ 逐步小下来，因此經过有限步驟后一定可以找出 a、b 的最大公約数来（最大公約数可以是 1）．这就是**輾轉相除法**，或称**欧几里得算法**．这个方法是我們这本小册子的灵魂．

例 1　求 360 和 450 的最大公約数．

$$450=1\times360+90,$$

$$360=4\times90.$$

所以 90 是 360、450 的最大公約数．由于最小公倍数等于两数相乘再除以最大公約数，因此这二数的最小公倍数等于

$$360\times450\div90=1800,$$

因而得出上节的結果．

例 2　求 42897 和 18644 的最大公約数．

$$42897=2\times18644+5609,$$

$$18644=3\times5609+1817,$$

$$5609=3\times1817+158,$$

$$1817=11\times158+79,$$

$$158=2\times79.$$

因此最大公約数等于 79.

計算的草式如下：

42897		
−37288	2	18644
5609	3	16827
5451	3	1817
158	11	1738
158	2	79
0		

例 2 的計算也可以写成为

$$\frac{42897}{18644}=2+\frac{5609}{18644}=2+\cfrac{1}{\frac{18644}{5609}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\frac{1817}{5609}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{158}{1817}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{11+\frac{79}{158}}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{11+\frac{1}{2}}}}.$$

这样的繁分数称为**連分数**．为了节省篇幅，我們把它写成

$$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{11+}\frac{1}{2}.$$

注意 2、3、3、11、2 都是草式中間一行的数字．倒算回去，得

$$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{11+}\frac{1}{2}=2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{2}{23}$$

$$=2+\frac{1}{3+}\frac{23}{71}=2+\frac{71}{236}=\frac{543}{236}.$$

这就是原来分数的旣約分数。

依次截段得

$$2,\quad 2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3},\quad 2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3}=\frac{23}{10},\quad 2+\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{11}=\frac{260}{113}.$$

这些分数称为$\frac{543}{236}$的**漸近分数**. 我們看到第一个漸近分数比$\frac{543}{236}$小，第二个漸近分数比它大，第三个又比它小，……为什么叫做漸近分数？我們看一下分母不超过 10 的分数和$\frac{543}{236}$相接近的情况.

分母是 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，而最接近于$\frac{543}{236}$的分数是

$$\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{7}{3},\frac{9}{4},\frac{12}{5},\frac{14}{6},\frac{16}{7},\frac{19}{8},\frac{21}{9},\frac{23}{10}.$$

取二位小数，它們分别等于

2.00,2.50,2.33,2.25,2.40,2.33,2.29,2.38,2.33,2.30.

和$\frac{543}{236}=2.30$相比較，可以发現其中有几个特出的旣約分数

$$\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{7}{3},\frac{16}{7},\frac{23}{10},$$

这几个数比它們以前的数都更接近于$\frac{543}{236}$. 而其中$\frac{2}{1}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{23}{10}$都是由連分数截段算出的数，即它們都是漸近分数.

我們現在再証明，分母小于 113 的分数里面，沒有一个比$\frac{260}{113}$更接近于$\frac{543}{236}$了. 要証明这点很容易，首先

$$\left|\frac{543}{236}-\frac{260}{113}\right|=\frac{1}{236\times 113}.$$

命$\frac{a}{b}$是任一分母 b 小于 113 的分数，那么

$$\left|\frac{543}{236}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|543b-236a|}{236\times b}\geqslant\frac{1}{236\times b}>\frac{1}{236\times 113}.$$

四　答第二节的問

現在我們来回答第二节里的問題：怎样算出人造行星 2113 年又將非常接近地球？

人造行星繞日一周需 450 天，地球繞日一周是 $365\frac{1}{4}$ 天．如果以 $\frac{1}{4}$ 天做单位，那么人造行星和地球繞日一周的时間各为 1800 和 1461 个单位。如上节所講的方法，

1800		1461
1461	1	
339	4	1356
315	3	105
24	4	96
18	2	9
6	1	6
6	2	3，
0		

即得連分数

$$1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}.$$

由此得漸近分数

$$1,\ 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ 1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3}=\frac{16}{13},\ 1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}=\frac{69}{56},$$

$$1+\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2}=\frac{154}{125},\ \cdots\cdots$$

第一个漸近分数說明了地球 5 圈，人造行星 4 圈，即五年后人造行星和地球接近．但地球 16 圈，人造行星 13 圈更接近些；地球 69 圈，人造行星 56 圈还要接近些；而地球 154 圈，人造

行星 125 圈又更要接近些。这就是报上所登的苏联专家所算出的数字了，这也就是在

$$1959+154=2113$$

年，人造行星将非常接近地球的道理。

当然，由于連分數还可以做下去，所以我們可以更精密地算下去；但是因为 450 天和 $365\frac{1}{4}$ 天这两个数字本身并不很精确，所以再繼續算下去也就沒有太大的必要了。但讀者不妨作为习題再算上一項。

五　約率和密率的內在意义

在上节中，我們将 $365\frac{1}{4}$、450 乘 4 以后再算。实际上，在求两个分数的比的連分数时，不必把它們化为两个整数再算。

例如，3.14159265 和 1 可以計算如下：

3.14159265		1
3	3	
0.14159265	7	0.99114855
0.13277175	15	0.00885145
0.00882090	1	0.00882090
		0.00003055

卽得

$$\pi=3+\frac{1}{7}\,\underset{+}{}\,\frac{1}{15}\,\underset{+}{}\,\frac{1}{1}\,\underset{+}{}\cdots。$$

漸近分數是

3　　〔径一周三，《周髀算径》〕，

$3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$　　〔約率，何承天（公元370-447）〕，

$3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15}=\frac{333}{106}$，

$3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1}=\frac{355}{113}$　〔密率，祖冲之（公元429-500）〕。

实际算出$\frac{22}{7}=3.142$和$\frac{355}{113}=3.1415929$，誤差分别在小数点后第三位和第七位。

用比$\pi=3.14159265$更精密的圓周率来計算，我們可以得出

$$\pi=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{1}{292+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\cdots.$$

$\frac{355}{113}$之后的一个漸近分数是$\frac{103993}{33102}$。这是一个很不容易記忆、也不便于应用的数。

以下的数据說明，分母比7小的分数不比$\frac{22}{7}$更接近于π，而分母等于8的也不比$\frac{22}{7}$更接近于π。

分母 q	$q\pi$	分子 p	$\pi-\frac{p}{q}$
1	3.1416	3	0.1416
2	6.2832	6	0.1416
3	9.4248	9	0.1416
4	12.5664	13	−0.1084
5	15.7080	16	−0.0584
6	18.8496	19	−0.0251
7	21.9912	22	−0.0013
8	25.1328	25	0.0166

关于$\frac{333}{106}$也有同样性質（以后将会証明的）。为了避免不

必要的計算，我仅仅指出，

$$\left|\pi-\frac{330}{105}\right|=\left|\pi-\frac{22}{7}\right|=0.0013,$$

$$\left|\pi-\frac{333}{106}\right|=0.00009,$$

$$\left|\pi-\frac{336}{107}\right|=0.0014,$$

以 $\frac{333}{106}$ 的誤差为最小。又

$$\left|\pi-\frac{352}{112}\right|=0.0013,$$

$$\left|\pi-\frac{355}{113}\right|=0.0000007,$$

$$\left|\pi-\frac{358}{114}\right|=0.0012,$$

以 $\frac{355}{113}$ 的誤差为最小。

总之，在分母不比 8、107、114 大的分数中，分别不比 $\frac{22}{7}$、$\frac{333}{106}$、$\frac{335}{113}$ 更接近于 π；而 $\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$ 又是两个相当便于記忆和应用的分数。我国古代的数学家祖冲之能在这么早的年代，得到 π 的这样两个很理想的近似値，是多么不簡单的事。

注意　并不是仅有这些数有这性質，例如 $\frac{331}{99}$ 就是一个。

$$\left|\pi-\frac{308}{98}\right|=0.0013,\qquad \left|\pi-\frac{311}{99}\right|=0.0002,$$

$$\left|\pi-\frac{314}{100}\right|=0.0016.$$

又

$$\frac{374}{119}=3.1429,\quad \frac{377}{120}=3.14167,\quad \frac{380}{121}=3.1405.$$

这說明 $\frac{377}{120}$ 比另外两个数来得好，但是它的分母比 $\frac{355}{113}$ 的分母大，而且它不比 $\frac{355}{113}$ 更精密，它的精密度甚至落后于 $\frac{333}{106}$。

六　为什么四年一閏，而百年又少一閏？

如果地球繞太阳一周是 365 天整，那我們就不需要分平年和閏年了。也就是沒有必要每隔四年把二月份的 28 天改为 29 天了。

如果地球繞太阳一周恰恰是 $365\frac{1}{4}$ 天，那我們四年加一天的算法就很精确，沒有必要每隔一百年又少加一天了。

如果地球繞太阳一周恰恰是 365.24 天，那一百年必須有 24 个閏年，即四年一閏而百年少一閏，这就是我們用的历法的来源。由 $\frac{1}{4}$ 可知：每四(分母)年加一(分子)天；由 $\frac{24}{100}$ 可知：每百(分母)年加 24 (分子)天。

但是事实并不这样簡单，地球繞日一周的时間是 365.2422 天。由

$$0.2422=\frac{2422}{10000}$$

可知：一万年应加上 2422 天，但按百年 24 閏計算只加了 2400 天，显然少算了 22 天。

現在讓我們用求連分数的漸近分数来求得更精密的結果。

我們知道地球繞太阳一周需时 365 天 5 小时 48 分 46 秒，也就是

$$365+\frac{5}{24}+\frac{48}{24\times 60}+\frac{46}{24\times 60\times 60}=365\frac{10463}{43200},$$

展开得連分数

$$365\frac{10463}{43200}=365+\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{64}.$$

算法是

		43200
10463	4	41852
9436	7	1348
1027	1	1027
963	3	321
64	5	320
64	64	1.
0		

分数部分的漸近分数是

$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4+}\frac{1}{7}=\frac{7}{29}$, $\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1}=\frac{8}{33}$, $\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}=\frac{31}{128}$,

$\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5}=\frac{163}{673}$,

$\frac{1}{4+}\frac{1}{7+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{64}=\frac{10463}{43200}$.

和 π 的漸近分数一样，这些漸近分数也一个比一个精密．这說明四年加一天是初步的最好的近似值，但 29 年加 7 天更精密些，33 年加 8 天又更精密些，而 99 年加 24 天正是我們百年少一閏的由来．由数据也可見 128 年加 31 天更精密（也就是說头三个 33 年各加 8 天，后一个 29 年加 7 天，共 $3\times33+29=128$ 年加 $3\times8+7=31$ 天），等等．

所以积少成多，如果过了 43200 年，照百年 24 閏的算法一共加了 $432\times24=10368$ 天，但是照精密的計算，却应当加 10463 天，一共少加了 95 天．也就是說，按照百年 24 閏的算法，过 43200 年后，人們将提前 95 天过年，也就是在秋初就要

过年了!

不过我們的历法除訂定四年一閏、百年少一閏外,还訂定每400年又加一閏,这就差不多补偿了按百年24閏計算少算的差数.因此照我們的历法,即使过43200年后,人們也不会在秋初就过年.我們的历法是相当精确的.

七 农历的月大月小、閏年閏月

农历的大月三十天、小月二十九天是怎样按排的?

我們先說明什么叫朔望月.出現相同月面所間隔的时間称为朔望月,也就是从滿月(望)到下一个滿月,从新月(朔)到下一个新月,从蛾眉月(弦)到下一个同样的蛾眉月所間隔的时間.我們把朔望月取作农历月.

已經知道朔望月是29.5306天,把小数部分展为連分数

$$0.5306=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{33}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2},$$

它的漸近分数是

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{8}{15},\ \frac{9}{17},\ \frac{26}{49},\ \frac{867}{1634},\ \frac{893}{1683}.$$

也就是說,就一个月来說,最近似的是30天,两个月就应当一大一小,而15个月中应当8大7小,17个月中9大8小等等.就49个月来說,前两个17个月里,都有9大8小,最后15个月里,有8大7小,这样在49个月中,就有26个大月.

再說农历的閏月的算法.地球繞日一周需365.2422天,朔望月是29.5306天,而它正是我們通用的农历月,因此一年中应該有

$$\frac{365.2422}{29.5306}=12.37\cdots=12\frac{10.8750}{29.5306}$$

个农历的月份，也就是多于12个月．因此农历有些年是12个月；而有些年有13个月，称为閏年．把0.37展成連分数

$$0.37=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3},$$

它的漸近分数是

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{19},\ \frac{10}{27}.$$

因此，两年一閏太多，三年一閏太少，八年三閏太多，十九年七閏太少．如果算得更精密些

$$\frac{10.8750}{29.5306}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{16}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.$$

它的漸近分数是

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{19},\ \frac{116}{315},\ \frac{123}{334},\ \frac{731}{1985},\cdots.$$

八　火星大冲

我們知道地球和火星差不多在同一平面上围繞太阳旋轉；火星軌道在地球軌道之外．当太阳、地球和火星在一直綫上并且地球在太阳和火星之間时，这种現象称为**冲**．在冲时地球和火星的距离比冲之前和冲之后的距离都小，因此便于观察．地球軌道和火星軌道之間的距离是有远有近的．在地球軌道和火星軌道最接近处发生的冲叫**大冲**．理解冲的現象最方便的办法是看鐘面．时針和分針相重合就是冲．12小时中有多少次冲？分針一小时走360°（$=2\pi$），时針走30°（$=\frac{2\pi}{12}$）．

从 12 点正开始，走了 t 小时后，分針和时針的角度差是

$$\left(2\pi-\frac{2\pi}{12}\right)t.$$

如果两針相重，那么这差額应是 2π 的整数倍，也就是要求出那些 t 滿足下列等式：

$$\left(2\pi-\frac{2\pi}{12}\right)t=2\pi n.$$

其中 n 是整数，也就是要找 t 使

$$\frac{11}{12}t$$

是整数，即在 $\frac{12}{11}$, $2\times\frac{12}{11}$, $3\times\frac{12}{11}$, ……小时时，分針和时針发生了冲，在 12 小时中共有 11 次冲。

現在回到火星大冲問題。火星繞日一周需 687 天，地球繞日一周需 $365\frac{1}{4}$ 天。把它們的比展成連分数

$$\frac{687}{365.25}=1+\frac{1}{1+}\frac{1}{7+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{11},$$

取一个漸近分数

$$1+\frac{1}{1+}\frac{1}{7}=\frac{15}{8},$$

它説明地球繞日 15 圈和火星繞日 8 圈的时間差不多相等，也就是大約 15 年后火星地球差不多回到了原来的位置，即从第一次大冲到第二次大冲需間隔 15 年。上一次大冲在 1956 年 9 月，下一次約在 1971 年 8 月。

再看看冲的情况如何？每一天地球轉过 $\frac{2\pi}{365.25}$ 度，火星轉过 $\frac{2\pi}{687}$ 度。我們看在什么时候太阳、地球和火星在一直綫上。在 t 天之后，地日火的夹角等于

$$\left(\frac{2\pi}{365.25}-\frac{2\pi}{687}\right)t.$$

如果三者在一直綫上，并且地球在太阳和火星之間，那么有整数 n 使

$$\left(\frac{2\pi}{365.25}-\frac{2\pi}{687}\right)t=2\pi n,$$

即

$$t=\frac{687\times365.25}{321.75}\times n=780\times n,$$

于是当 $n=1,2,\cdots\cdots$ 时所求出的 t 都是发生冲的时間．所以約每隔 2 年 50 天有一次冲．

注意 1 对于冲的发生可以严格要求三星一綫，但对于大冲仅要求差不多共綫就行了．然而二者都要求地球在太阳和火星之間．

注意 2 如果鐘面上还有秒針，問是否可能三針重合？

九 日月食

前面已經介紹过朔望月，現在再介紹交点月．大家知道地球繞太阳轉，月亮繞地球轉．地球的軌道在一个平面上，称为**黄道面**． 而月亮的軌道并不在这个平面上，因此月亮軌道和这黄道面有**交点**． 具体地說，月亮从地球軌道平面的这一側穿到另一側时有一个交点，再从另一側又穿回这一側时又有一个交点，其中一个在地球軌道圈內，另一个在圈外．从圈內交点到圈內交点所需时間称为**交点月**． 交点月約为 27.2123 天．

当太阳、月亮和地球的中心在一直綫上，这时就发生日食（如图 1）或月食（如果月亮在地球的另一側）． 如图 1，由于

三点在一直綫上，因此月亮一定在地球軌道平面上，也就是月亮在交点上；同时也是月亮全黑的时候，也就是朔。从这样的位置再回到同样的位置必需要有二个条件：从一交点到同一交点(这和交点月有关)；从朔到朔(这和朔望月有关)。现在我們来求朔望月和交点月的比。

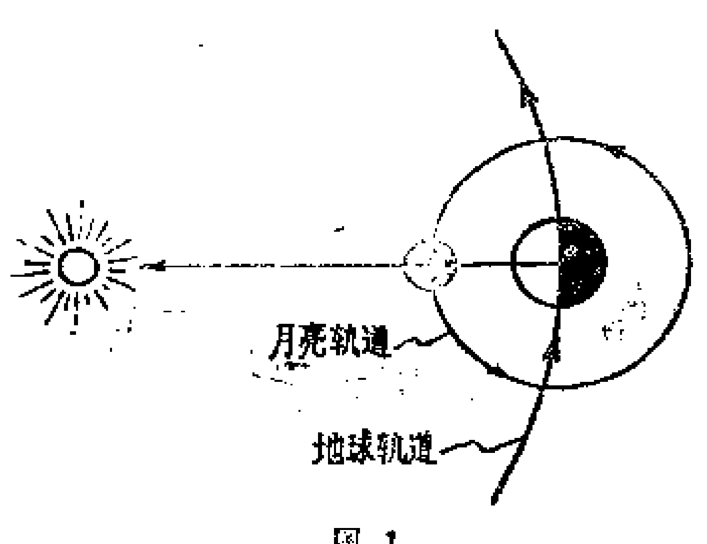


图 1.

我們有

$$\frac{29.5306}{27.2123}=1+\frac{1}{11+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{2+}\frac{1}{9+}\frac{1}{1+}\frac{1}{25+}\frac{1}{2},$$

考虑漸近分数

$$1+\frac{1}{11+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}=\frac{242}{223},$$

而 223×29.5306 天 $=6585$ 天 $=18$ 年 11 天，

这就是說，經过了 242 个交点月或 223 个朔望月以后，太阳、月亮和地球又差不多回到了原来的相对位置。应当注意的是不一定这三个天体的中心准在一直綫上时才出現日食或月食，稍偏一些也会发生，因此在这 18 年 11 天中会发生好多次日食和月食(約有 41 次日食和 29 次月食)，虽然相邻两次日食(或月食)的間隔时間并不是一个固定的数，但是經过了 18 年11天以后，由于这三个天体又回到了原来的相对位置，因此

在这 18 年 11 天中日食、月食发生的规律又重复实現了。这个交食(日食月食的总称)的周期称为**沙罗周期**。“沙罗”就是重复的意思。求出了沙罗周期，就大大便于日食月食的测定。

一〇 日月合璧，五星联珠，七曜同宫

今年(1962年)二月五日那天，正当我們欢度春节的时候，天空中出現了一个非常罕見的現象，那就是金、木、水、火、土五大行星在同一方向上出現，而且就在这方向上日食也正好

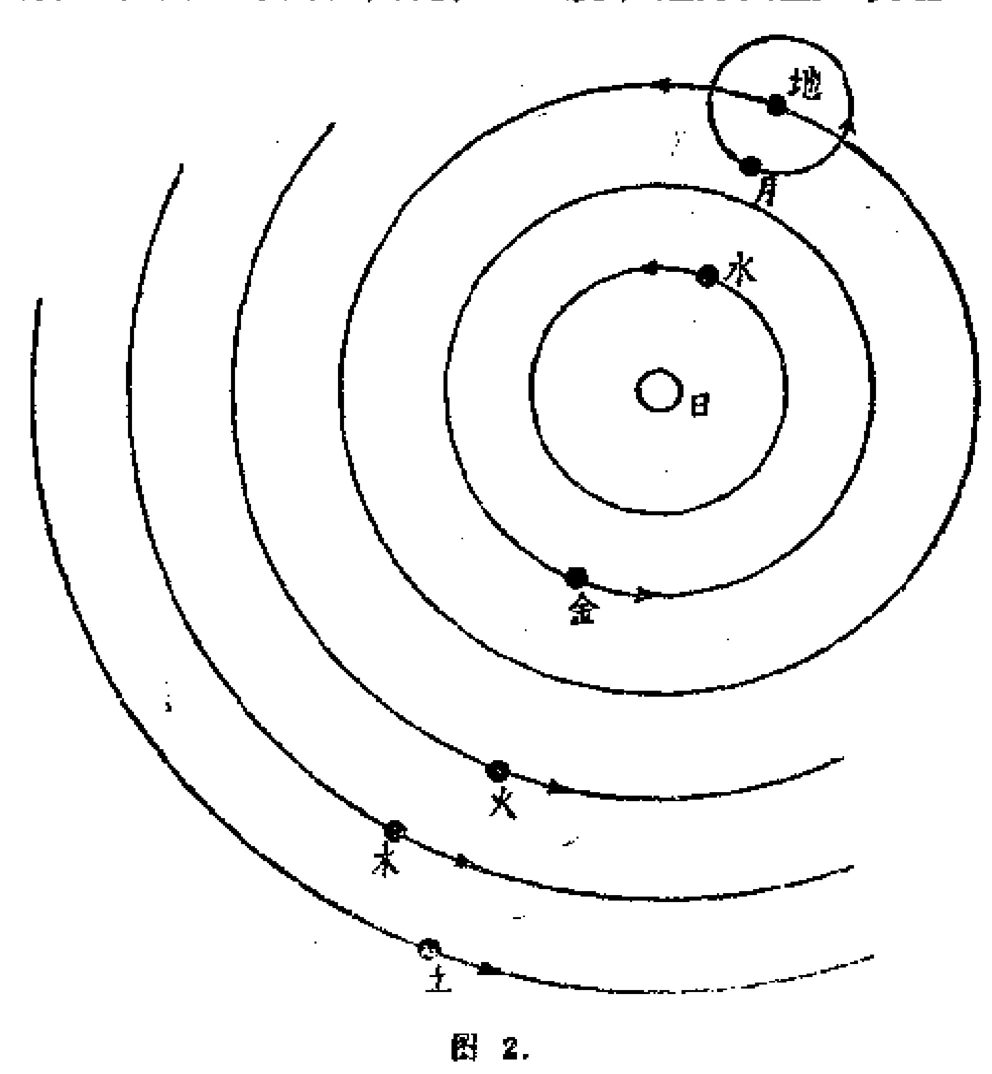


图 2.

发生。这种現象称为**日月合璧**，**五星联珠**，**七曜同宫**（图2），这是几百年才出現一次的現象。

天文学家把"天"划分成若干部分，每一部分称为一个星座。通过黄道面的共有12个星座，称为**黄道十二宫**。这次金、木、水、火、土、日、月七个星球同时走到了一个宫內（宝瓶宫），而日食也在这宫內发生。

現在我們根据下表来說明这种現象是怎样发生的。

星　别	水　星	金　星	火　星	土　星	木　星	太　阳	月　亮
赤　經	318°15′	320°30′	319°45′	321°15′	323°45′	318°15′	818°
赤　緯	12°24′	16°45′	20°36′	19°40′	15°54′	16°08′	15°57′

表中的赤經和赤緯表示某一星球的方向。如果两个星球对应的赤經和赤緯很接近，那么在地球上看起来，它們在同一个方向上出現。表中所列是1962年二月五日那天各星球的方向，由此可見它們方向的相差是不大的。怎样来理解不大？鐘面上每一小时代表360°/12＝30°，每一分鐘代表30°/5＝6°，也就是一分鐘的角度是6°。这就可以看出这七个星球的方向是多么互相接近了。

为什么又称为五星联珠呢？我們看起来，那天金、木、水、火、土五星的位置差不多在一起，但实际上它們是有远有近的，因此好象串成了一串珠子一样。这种現象也称为五星聚。古代迷信的人把五星联珠看作吉祥之兆，因此把相差不超过45°的情況都称为五星联珠了。

关于这种現象，远在二千多年前，我国历史上就有了記

載。在《汉書》律历志上是这样写的：

复复太初历，晦朔弦望皆最密，日月如合璧，五星如連珠。

而且还有一个注：

太初上元甲子夜半朔旦冬至时，七曜皆会聚斗牵牛分度，夜尽如合璧連珠。

太初是汉武帝的年号，在公元前 104 年。

讀者一定希望知道何时再发生几个星球的联珠現象，我們在下面两节中提出一个考虑这个問題的粗略方法。

一 計算方法

我們用以下方法解决类似于上节所提出的問題。

問題 I 假定有內外两圈圓跑道，甲在里圈沿反时針方向匀速行走，49 分走完一圈；乙在外圈也沿反时針方向匀速行走，86 分鐘走完一圈。出发时他們和圓心在一直綫上。問何时甲、乙在圓心所张的角度小于 15°？

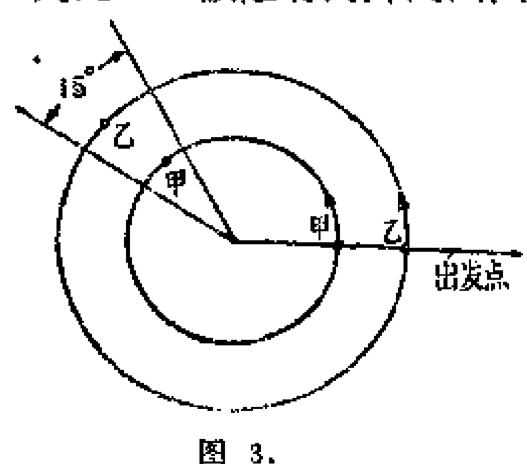


图 3.

解 甲每分鐘行走 $\frac{2\pi}{49}$ 度，乙每分鐘行走 $\frac{2\pi}{86}$ 度。t 分鐘后，走过的角度差是 $(\frac{2\pi}{49}-\frac{2\pi}{86})t$．所以他們与圓心連結的角度是

$$\theta=(\frac{2\pi}{49}-\frac{2\pi}{86})t-2\pi m,$$

这儿m是一个自然数，使θ的絕对值最小. 問題一变而为t是何值时，存在自然数m使

$$\left|\left(\frac{2\pi}{49}-\frac{2\pi}{86}\right)t-2\pi m\right|<15^\circ=\frac{2\pi\times 15}{360}=\frac{2\pi}{24},$$

也就是

$$\left|\frac{37t}{4214}-m\right|<\frac{1}{24}.$$

取$m=0$，得

$$t<\frac{4214}{37\times 24}=4.75,$$

即在出发后4.75分钟之内夹角都小于15°.

取$m=1$，得

$$\frac{23}{24}<\frac{37}{4214}t<\frac{25}{24},$$

即 $$109.15\leqslant t\leqslant 118.64,$$

也就是說，出发4.75分钟后，夹角开始变得大于15°；在出发后的109.15分到118.64分之間时，夹角又在15°内.

一般地讲，

$$m-\frac{1}{24}<\frac{37}{4214}t<m+\frac{1}{24},$$

即 $$\frac{4214}{37}m-\frac{4214}{24\times 37}<t<\frac{4214}{37}m+\frac{4214}{37\times 24},$$

$$113.9m-4.75<t<113.9m+4.75. \qquad (1)$$

这个問題看来較难，而实质上比本文所討論的其它問題都更容易. 把这問題代数化一下：假定甲、乙各以a、b分钟走完一圈，那么

$$\left|\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)t-m\right|\leqslant\frac{1}{24},$$

即 $$\frac{ab}{b-a}\left(m-\frac{1}{24}\right)<t<\frac{ab}{b-a}\left(m+\frac{1}{24}\right),\quad m=1,2,3,\cdots.$$

問題 2 如果还有一圈，丙以 180 分鐘走完一圈，問何时三个人同在一个 15° 的角內？

解 在直綫上用紅鉛笔标上区間(1)，即从 0 到 4.75，113.9－4.75 到 113.9＋4.75，113.9×2－4.75 到 113.9×2＋4.75，……分別涂上紅色。这是甲、乙同在 15° 角內的时間。同法用綠色綫标出甲、丙同在 15° 角內的时間，用蓝色綫标出乙、丙同在 15° 角內的时間。那么三色綫段的重复部分就是甲、乙、丙三人同在 15° 角內的时間。

当然，只是为了方便，才用各色綫来标出結果，讀者还是应当把它具体地計算出来。

現在我們回到第十节中所提出的問題，但把問題設想得簡单一点。假設各行星在同一平面上，以等角速度繞太阳旋轉，它們繞日一周所需时間列于下表：

星別	水星	金星	地球	火星	木星	土星
繞日周期	88天	225天	1年＝365天	1年322日	11年315日	29年167日

假設在 1962 年二月五日，地球、金、木、水、火、土等星球，位于以太阳为中心的圓的同一半径上，問經过多少时間以后它們都在同一个 30° 的圓心角內？

这个問題可以用上面所介紹的方法解决。当然，得到的結果是很粗略的，原因是各行星并非在一个平面上运动，而且它們也不是作等角速度运动，所以实际情况很复杂。但讀者不妨作为練习照上面的方法去計算一下。

一二 有理数逼近实数

以上所講的一些問題，可以概括并推广如下：

給定实数 $\alpha\,(>0)$，要求找一个有理数$\frac{p}{q}$去逼近它，說得更确切些，給一自然数 N，找一个分母不大于 N 的有理数$\frac{p}{q}$，使誤差

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$$

最小。

这是一个重要問題．由它引导出数論的一个称为丢番图(Diophantine)逼近論的分支．它也可以看成数学上各种各样逼近論的开端．

以上所講的感性知識告訴我們，如果 α 是一有理数，我們把 α 展开成連分数，而命 $\frac{p_n}{q_n}$ 为其第 n 个漸近分数，那么在分母不大于 q_n 的一切分数中，以 $\frac{p_n}{q_n}$ 和 α 最为接近．我們将在第十五节中証明这一事实．不但如此，这个事实对于 α 是无理数的情形也同样正确．为此，我們需要介紹把无理数展成連分数的方法．

在第三节中，我們已用輾轉相除法把一有理数$\frac{a}{b}$展成連分数．現在把那里的(1)，(2)，……諸式加以改写，便得

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=a_0+\dfrac{r}{b} & (0<r<b)\\[2mm] \dfrac{b}{r}=a_1+\dfrac{r_1}{r} & (0<r_1<r)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}}=a_{n-1}+\dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}} & (0<r_{n-1}<r_{n-2})\\[2mm] \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=a_n & \end{cases}$$

我們看到，$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 实际上也就是用 b 除 a，用 r 除 b，……，用 r_{n-1} 除 r_{n-2} 以及用 r_n 除 r_{n-1} 后所得各个商数的整数部分。如果以記号$[x]$来表示实数 x 的整数部分(即不大于 x 的最大整数，例如$[2]=2$，$[\pi]=3$，$[-1.5]=-2$ 等)，那末

$$a_0=\left[\frac{a}{b}\right],\quad a_1=\left[\frac{b}{r}\right],\quad \cdots,\quad a_{n-1}=\left[\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}}\right],\quad a_n=\left[\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}\right],$$

而$\frac{a}{b}$就有如下的連分数表示：

$$\frac{a}{b}=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_n}.$$

对于无理数 α，我們也可以用这方法将它以連分数表示。首先取 α 的整数部分 $[\alpha]$，用 a_0 記之，然后看 α 和 a_0 的差，$\alpha-a_0=\frac{1}{\alpha_1}$(注意，因为 α 是无理数，α_1一定大于 1)；再取 α_1 的整数部分 $[\alpha_1]$，記它为 a_1，而改写 α_1 和 a_1 的差，$\alpha_1-a_1=\frac{1}{\alpha_2}$ (注意，$\alpha_2>1$)；再取 α_2 的整数部分为 a_2……等等。也就是說，命

$$a_0=[\alpha],\qquad \alpha-a_0=\frac{1}{\alpha_1},$$
$$a_1=[\alpha_1],\qquad \alpha_1-a_1=\frac{1}{\alpha_2},$$
$$a_2=[\alpha_2],\qquad \alpha_2-a_2=\frac{1}{\alpha_3},$$
$$\cdots\cdots\qquad \cdots\cdots$$

于是显然有

$$\alpha=a_0+\frac{1}{\alpha_1}=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{\alpha_2}}=\cdots=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}$$
$$=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\cdots。①$$

在第五节开头我們就是按照这个方法去求 π 的連分数的。和有理数的情形一样，称

$$a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots+\frac{1}{a_n}$$

为 α 的第 n 个漸近分数。关于漸近分数的一些基本性質，将在下节中加以說明。

上面已經說过，我們将在第十五节中証明：如果命 $N=q_n$，則 $\frac{p_n}{q_n}$ 的确是使 $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$ $(q\leqslant N=q_n)$ 为最小的有理数。

但是并非仅有 $\frac{p_n}{q_n}$ 有这种性質，例如，在第三节中，我們已經給出例子：

$$\alpha=\frac{543}{236},\quad N=7,$$

而 $\frac{p}{q}=\frac{16}{7}$ 在所有分母不大于 7 的分数中最接近于 α，但 $\frac{16}{7}$ 并非 $\frac{543}{236}$ 的漸近分数。

一三 漸近分数

設 α 是一正数，并且假定它已展成連分数

$$\alpha=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots.$$

容易看到，它的前三个漸近分数是

$$\frac{a_0}{1},\quad \frac{a_1a_0+1}{a_1},\quad \frac{a_2(a_1a_0+1)+a_0}{a_2a_1+1}.$$

一般地，有

① 有理数 $\frac{a}{b}$ 的連分数表示一定是有尽的，而无理数 α 的連分数表示則一定无尽。

定理 1 如命

$$p_0=a_0,\quad p_1=a_1a_0+1,\quad p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}\quad (n\geqslant 2),$$

$$q_0=1,\quad q_1=a_1,\qquad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\quad (n\geqslant 2),$$

那么 $\frac{p_n}{q_n}$ 就是 α 的第 n 个漸近分数。

証 当 $n=2$ 时，定理已經正确。現在用数学归納法証明定理。

我們看到，α 的第 $n-1$ 个漸近分数

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}$$

和 α 的第 n 个漸近分数

$$a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}$$

的差别仅在于将 a_{n-1} 換成 $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$。所以若定理对 $n-1$ 正确，也就是如果 α 的第 $n-1$ 个漸近分数是

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}}{a_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3}},$$

那么第 n 个漸近分数应是

$$\frac{\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)p_{n-2}+p_{n-3}}{\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)q_{n-2}+q_{n-3}}=\frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3})+p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2}+q_{n-3})+q_{n-2}}$$

$$=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{p_n}{q_n}.$$

定理得到証明。

有了这个遞推公式，我們就可以根据 α 的連分数立刻写出它的各个漸近分数。

如果命

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1}+}\frac{1}{a_{n+2}+}\cdots,$$

那么显見

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{\alpha_n}.$$

它和 α 的第 n 个渐近分数的差別仅在于将 a_n 換成 α_n，于是由定理 1 立刻得到

定理 2

$$\alpha = \alpha_0,\quad \alpha = \frac{\alpha_1 a_0 + 1}{\alpha_1},\quad \alpha = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (n \geqslant 2).$$

定理 3

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}, \quad (n \geqslant 1),$$

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n, \quad (n \geqslant 2).$$

証 易見

$$p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_0 a_1 + 1) - a_1 a_0 = 1.$$

由定理 1 可知

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1}$$
$$= -(p_{n-1} q_{n-2} - q_{n-1} p_{n-2}).$$

故由数学归納法，立刻得出第一个式子。

仍用定理 1 和第一式，得出

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2}$$
$$= (-1)^n a_n.$$

从定理 3 的第一式可以看到，p_n 与 q_n 的任何公約数，一定除得尽 $(-1)^{n-1}$，所以得到

系 p_n 和 q_n 互素（即它們的最大公約数是 1）。

定理 4 $\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}=\frac{(-1)^n\alpha_{n+2}}{q_n(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)}$.

証 由定理 2 及定理 3，

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}.$$

和

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{\alpha_{n+2}p_{n+1}+p_n}{\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n\alpha_{n+2}}{q_n(\alpha_{n+2}q_{n+1}+q_n)}.$$

一四 实数作为有理数的极限

在本节中，我們假定α是无理数。由上节定理 3 推得

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}},$$

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^n a_n}{q_nq_{n-2}}.$$

由此并由定理 4，我們得到

$$\frac{p_0}{q_0}<\frac{p_2}{q_2}<\frac{p_4}{q_4}<\cdots<\frac{p_{2n}}{q_{2n}}<\cdots<\alpha,$$

和

$$\frac{p_1}{q_1}>\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_5}{q_5}>\cdots>\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}>\cdots>\alpha,$$

而且
$$\left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}}-\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right|=\frac{1}{q_{2n}q_{2n-1}}.$$

当n无限增大时，由上节定理 1，$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}>q_{n-1}$。因为$q_1=1$，所以$q_n\geqslant n$，因此$q_n$也无限增大。而$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$是一递增的数列，趋于极限$\alpha$；$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$是一递减的数列，趋于极限$\alpha$(由上节定理 4 可見当$n\longrightarrow\infty$时，$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{q_n^2}\longrightarrow 0$)。

定理 5 $\frac{p_n}{q_n}$ 趋于 α，而 $\frac{p_n}{q_n}$ 比 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 更接近于 α。也就是

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

証 由定理 4 已知

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})},$$

及

$$\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{\alpha_{n+1}(-1)^{n-1}}{q_{n-1}(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})},$$

由于 $\alpha_{n+1}\geqslant 1$ 及 $q_{n-1}<q_n$，所以

$$\frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})}<\frac{\alpha_{n+1}}{q_{n-1}(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})},$$

得

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

这証明也給出了

定理 6 $\frac{1}{q_{n-1}(q_n+q_{n-1})}\leqslant\left|\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\leqslant\frac{1}{q_{n-1}q_n}$.

因此推出

定理 7 有无限多对整数 p、q 使

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

一五 最佳逼近

問題 求出所有的 $\frac{P}{Q}$，使它比分母不大于 Q 的一切分数（不等于 $\frac{P}{Q}$）都更接近于 α，即要求，

$$\left|\alpha-\frac{P}{Q}\right|<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\left(q\leqslant Q, \frac{p}{q}\neq\frac{P}{Q}\right). \qquad (1)$$

先証一初步結果.

定理 8 設 $n\geqslant 1$、$q\leqslant q_n$，$\frac{p}{q}\neq\frac{p_n}{q_n}$，那么漸近分数 $\frac{p_n}{q_n}$ 比 $\frac{p}{q}$ 更接近于 α。

証 不妨假設 n 是偶数，至于 n 是奇数的情形可以完全同样地証明.

若 $\alpha=\frac{p_n}{q_n}$，定理自然成立. 現在假設 $\alpha\neq\frac{p_n}{q_n}$，若 $\frac{p}{q}$ 比 $\frac{p_n}{q_n}$ 更接近于 α. 由定理 5 可知

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\alpha-\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha,$$

即

$$\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\alpha-\frac{p}{q}<\alpha-\frac{p_n}{q_n},$$

也就是

$$\frac{p_n}{q_n}<\frac{p}{q}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}. \qquad (2)$$

所以我們只須証明适合上式的分数 $\frac{p}{q}$，必有分母 $q>q_n$。

如果

$$\alpha<\frac{p}{q}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

那么

$$\frac{1}{qq_{n-1}}\leqslant\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\frac{p}{q}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha=\frac{1}{q_{n-1}(\alpha_n q_{n-1}+q_{n-2})},$$

因此

$$q>\alpha_n q_{n-1}+q_{n-2}\geqslant a_n q_{n-1}+q_{n-2}=q_n.$$

同样地由

$$\frac{p_n}{q_n}<\frac{p}{q}<\alpha$$

可以得出 $q>q_{n+1}>q_n$。于是定理得到証明。

在定理的証明过程中，我們还推出下述的論断：

系　若 $\frac{p}{q}$ 在 $\frac{p_n}{q_n}$ 和 α 之間，那就必有 $q>q_{n+1}$。

定理 8 說明漸近分数滿足本节开始所提問題中对 $\frac{P}{Q}$ 的要求（1），但我們还不知道能滿足（1）的 $\frac{P}{Q}$ 是否仅限于漸近分数。关于这个問題，我們有下面的定理。

定理 9　（i）在分母不大于 $q_1=a_1$ 的一切分数中，只有

$$a_0+\frac{1}{q}\qquad\left(\frac{a_1+1}{2}\leqslant q\leqslant a_1\right)$$

滿足（1）。

（ii）設 $n\geqslant 2$。在分母大于 q_{n-1}、但不大于 q_n 的一切分数中，只有

$$\frac{tp_{n-1}+p_{n-2}}{tq_{n-1}+q_{n-2}}\qquad\left(\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)<t\leqslant a_n\right)$$

滿足（1）

証　先証（i）。我們有

$$a_0<\alpha\leqslant a_0+\frac{1}{a_1}\leqslant a_0+\frac{1}{q}\qquad(q\leqslant a_1),$$

a_0 和 $a_0+\frac{1}{q_1}$ 至 α 的距离分别等于 $\frac{1}{a_1}$ 和 $\frac{1}{q}-\frac{1}{a_1}$，所以当而且仅当 $2q>a_1$，或即 $q\geqslant\frac{a_1+1}{2}$ 时，$a_0+\frac{1}{q}$ 才比 a_0 更接近于 α。又对于任何 q，a_0 和 $a_0+\frac{1}{q}$ 的距离等于 $\frac{1}{q}$，所以 $a_0+\frac{1}{q}$（$\frac{a_1+1}{2}\leqslant q$

$\leqslant a_1$)比分母不大于 q 的其它任何分数都更接近于 α.

(ii)的証明：我們假設 n 是偶数，n 是奇数的情形可以同样証明.

由定理 3、4、5 可知

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}<2\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{p_n}{q_n}\leqslant\alpha<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \tag{3}$$

(因为 $2\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 和 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 到 α 的距离相等，而 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 比 $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ 更接近于 α, $\frac{p_n}{q_n}$ 又比 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 更接近于 α.)

設 $\frac{P}{Q}$ 滿足(1)和 $q_{n-1}<Q\leqslant q_n$，那么必有

$$\left|\frac{P}{Q}-\alpha\right|<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha.$$

即

$$\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{P}{Q}-\alpha<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha,$$

也就是

$$2\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{P}{Q}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

其次，由 $Q\leqslant q_n$ 和定理 8 的系，不可能有 $\frac{p_n}{q_n}<\frac{P}{Q}<\alpha$，也不可能有 $\alpha\leqslant\frac{P}{Q}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. 所以必有

$$2\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{P}{Q}\leqslant\frac{p_n}{q_n}. \tag{4}$$

再次，由定理 3 可得

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}<\cdots<\frac{lp_{n-1}+p_{n-2}}{lq_{n-1}+q_{n-2}}<\frac{(l+1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l+1)q_{n-1}+q_{n-2}}<\cdots<\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$$
$$=\frac{p_n}{q_n}. \tag{5}$$

所以必有唯一的 l_0 ($0\leqslant l_0<a_n$) 使

$$\frac{l_0 p_{n-1}+p_{n-2}}{l_0 q_{n-1}+q_{n-2}}\leqslant 2\alpha-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{(l_0+1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l_0+1)q_{n-1}+q_{n-2}}, \qquad (6)$$

即

$$\alpha-\frac{l_0 p_{n-1}+p_{n-2}}{l_0 q_{n-1}+q_{n-2}}\geqslant\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\alpha>\alpha-\frac{(l_0+1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l_0+1)q_{n-1}+q_{n-2}}.$$

将 $\alpha=\frac{a_n p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+q_{n-2}}$ 代入上式，并加整理，最后得

$$\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)-1<l_0\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right).$$

由(4)、(5)、(6)必有唯一的 l ($l_0+1\leqslant l\leqslant a_n$) 使

$$\frac{(l-1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l-1)q_{n-1}+q_{n-2}}<\frac{P}{Q}\leqslant\frac{l p_{n-1}+p_{n-2}}{l q_{n-1}+q_{n-2}}.$$

倘若等式不成立，即若

$$\frac{(l-1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l-1)q_{n-1}+q_{n-2}}<\frac{P}{Q}<\frac{l p_{n-1}+p_{n-2}}{l q_{n-1}+q_{n-2}},$$

那就有

$$\frac{1}{Q[(l-1)q_{n-1}+q_{n-2}]}\leqslant\frac{P}{Q}-\frac{(l-1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l-1)q_{n-1}+q_{n-2}}<\frac{l p_{n-1}+p_{n-2}}{l q_{n-1}+q_{n-2}}$$
$$-\frac{(l-1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(l-1)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{1}{[(l-1)q_{n-1}+q_{n-2}](l q_{n-1}+q_{n-2})}.$$

即得

$$Q>lq_{n-1}+q_{n-2}.$$

但

$$\alpha-\frac{P}{Q}>\alpha-\frac{l p_{n-1}+p_{n-2}}{l q_{n-1}+q_{n-2}}\geqslant 0,$$

这和要求(1)矛盾。所以必有 $\frac{P}{Q}=\frac{l p_{n-1}+p_{n-2}}{l q_{n-1}+q_{n-2}}$ ($l_0+1\leqslant l\leqslant a_n$).

反之，这些分数的分母都适合 $q_{n-1}<Q\leqslant q_n$，并且它們滿足（1）。因为假如 $\frac{p}{q}$ 和 α 的距离小于或等于 $\frac{lp_{n-1}+p_{n-2}}{lq_{n-1}+q_{n-2}}$ 和 α 的距离，那么 $\frac{p}{q}$ 或者落在 $\frac{p_n}{q_n}$ 和 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間，而由定理 8 的系得 $q>q_n$；或者落在 $\frac{lp_{n-1}+p_{n-2}}{lq_{n-1}+q_{n-2}}$ 和 $\frac{p_n}{q_n}$ 之間，而有 $k(l<k\leqslant a_n)$ 使

$$\frac{kp_{n-1}+p_{n-2}}{kq_{n-1}+q_{n-2}}<\frac{p}{q}\leqslant\frac{(k+1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(k+1)q_{n-1}+q_{n-2}}.$$

由上面同样的証明，得到 $q\geqslant(k+1)q_{n-1}+q_{n-2}>lq_{n-1}+q_{n-2}$。所以总有

$$q>lq_{n-1}+q_{n-2},$$

也就是說 $\frac{lp_{n-1}+p_{n-2}}{lq_{n-1}+q_{n-2}}(l_0+1\leqslant l\leqslant a_n)$ 滿足（1）。定理証完。于是本节开始所提出的問題得到完全的解决。

一六　結束語

我們在这里只挑选了少数容易說明的应用；就問題的性質来說，应用的范围是寬广的。凡是几种周期的重迭或复迭，都可能用到这一套数学；而多种周期的現象，經常出現于声波、光波、电波、水波和空气波的研究之中。又如堤身每隔 a 分鐘受某种冲击力，每隔 b 分鐘受另一种冲击力，用这套数学可以确定大致每隔多少分鐘最大的冲击力出現一次，等等。

本書是为中学生写的。和这有关的許多有趣的、更深入的問題，这里不談了。要想进一步了解的讀者，可以参考拙著《数論导引》第十章。

为了迎接 1962 年的数学竞賽，这本小書写得太匆忙了，

沒有經过充分的修飾和考慮，更沒有預先和中学生們在一起共同研究一下，希望讀者、特別是中学教师和高中同学們多多提意見。

1962 年春节完稿于从化溫泉

在完稿之后，又改写了几次。中国科技大学高等数学教研室副主任龔昇同志曾就原稿提出了不少宝貴意見。中国科学院自然科学史研究室严敦杰同志提供了有价值的历史資料。而在改写过程中，又曾得到吳方、徐誠浩、謝盛剛、李根道四位同志的帮助。特別是吳方同志对第十二到十五节作了重大修改，徐誠浩同志对有关天文的部分提了很多意見，又北京天文館刘麟仲同志提供了今年春节“五星联珠，七曜同宫”現象的图象，对于以上諸同志的帮助，一并在此致謝。

于中国科学技术大学

1962 年四月八日

附录　祖冲之簡介

祖冲之，字文远，生于公元429年，卒于公元500年。他的祖籍是范阳郡蓟县，就是现在的河北省涞源县。他是南北朝时代南朝宋齐之間的一位杰出的科学家。他不仅是一位数学家，同时还通晓天文历法、机械制造、音乐，并且是一位文学家。

在机械制造方面，他重造了指南車，改进了水碓磨，創制了一艘"千里船"。在音乐方面，人称他'精通"鐘律"，独步一时'。在文学方面，他著有小說《述异記》十卷。

祖家世世代代都对天文历法有研究，他比較容易接触到数学的文献和历法資料，因此他从小对数学和天文学就发生兴趣。用他自己的話来說，他从小就"专攻数术，搜炼古今"。这"搜"、"炼"两个字，刻划出他的治学方法和精神。

"搜"表明他不但閱讀了祖輩相传的文献和資料，还主动去寻找从远古到他所生活的时代的各項文献和观測紀录，也就是說他尽量吸收了前人的成就。而更重要的还在"炼"字上，他不仅閱讀了这些文献和資料，并且做过一些"由表及里，去蕪存精"的工作，把自己所搜到的資料經过消化，据为己有。最具体的例子是注解了我国历史上的名著《九章算术》。

他广博地学习和消化了古人的成就和古代的資料，但是他不为古人所局囿，他决不"虛推古人"，这是另一个可貴的特

点。 例如他接受了刘徽算圆周率的方法，但是他并不满足于刘徽的结果 $3.14\frac{64}{125}$，他进一步計算，算到圆內接正 1536 边形，得出圆周率3.1416。但是他还不满足于这一結果，又推算下去，得出

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

这一結果的重要意义在于指出誤差范围。大家不要低估这个工作，它的工作量是相当巨大的。 至少要对 9 位数字反复进行 130 次以上的各种运算，包括开方在內。 即使今天我們用紙笔来算，也絕不是一件輕松的事，何况古代計算还是用算筹(小竹棍)来进行的呢？这需要怎样的細心和毅力啊！他这种严謹不苟的治学态度，不怕复杂計算的毅力，都是值得我們学习的。

他在历法方面测出了地球繞日一周的时間是 365.24281481 日，跟現在知道的数据 365.2422 对照，知道他的数值准到小数第三位。 这当然是由于受当时仪器的限制；根据这个数字，他提出了把农历的19年 7 閏改为 391年 144 閏的主张。 这一論断虽有它由于测量不准的局限性，但是他的数学方法是正确的(讀者可以根据本書的論述来判断这一建議的精密度：$\frac{10.8750}{29.5306}=0.36826$ 只能准到四位，$\frac{7}{19}=0.3684$，$\frac{144}{391}=0.36829$，$\frac{116}{315}=0.36825$)。

他这种勤奋实践、不怕复杂計算和精細测量的精神，正如他所說的"亲量圭尺，躬察仪漏，目尽毫厘，心穷筹算"。 由于有这样的精神，他发現了当时历法上的錯誤，因此着手編制出

新的历法，这是当时最好的历法。在公元 462 年（刘宋大明六年），他上表給皇帝刘駿，請討論頒行，定名为“大明历”。

新的历法遭到了戴法兴的反对。戴是当时皇帝的宠幸人物，百官惧怕戴的权势，多所附和。戴法兴認为“古人制章”“万世不易”，是“不可革”的，認为天文历法“非凡夫所測”。甚至于罵祖冲之是“誣天背經”，說“非冲之浅虑，妄可穿凿”的。祖冲之并沒有为这权貴所吓倒，他写了一篇《駁議》，說“願聞显据，以窍理实”，并表示了“浮詞虛貶，窃非所懼”的正确立場。

这場斗爭祖冲之并沒有得到胜利，一直到他死后，由于他的儿子祖暅的再三坚持，經过了实际天象的检驗，在公元 510 年（梁天监九年）才正式頒行。这已經是祖冲之死后的第十个年头了。

祖冲之的数学专著《綴术》已經失传。《隋書》中写道：“……祖冲之……所著書，名为綴术，学官莫能究其深奥，是故废而不理。”这是我們数学史上的一个重大損失。

祖冲之虽已去世一千四百多年，但他的广泛吸收古人成就而不为其所拘泥、艰苦劳动、勇于創造和敢于坚持眞理的精神，仍旧是我們应当学习的榜样。